جزوه جمع بندی ریاضیات کنکور ۹۶

محمدرضا نظـری

سؤال های کنکور ریاضی و تجربی

داخل و خارج کشور

سال ۹۰ تا ۹۵

موضوع به موضوع

نشانی تلگرام: @tmrnazari

Scanned by CamScanner

۵. دامنـــه و بـــرد

@tmrnazari
محمد رضا نظری
@mrnazari

Scanned by CamScanner

۵- تابع با دامنه و برد

۱- اگر $f(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$، دامنه‌ی تابع $f(۳-x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۲)

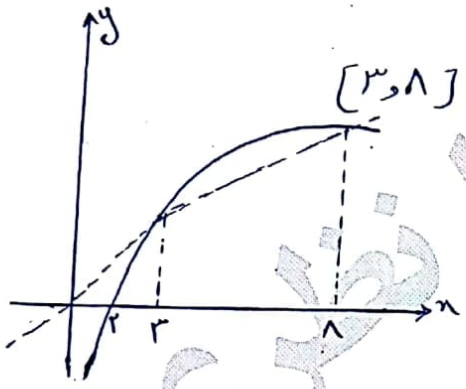
۱) $[۰,۲]$ ۲) $[۰,۳]$ ۳) $[۱,۲]$ ۴) $[۱,۳]$

$f(x)=\sqrt{۲x-x^۲} \longrightarrow ۲x-x^۲\geq ۰ \quad ۰\leq x\leq ۲ \quad D_{f(x)}=[۰,۲]$

می‌دانیم دامنه‌ی تعریف تابع $f(x)$ بازه‌ی $[۰,۲]$ است، پس برای تعیین دامنه‌ی تعریف تابع $f(۳-x)$ ورودی این تابع یعنی $۳-x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$۰\leq ۳-x\leq ۲ \xrightarrow{-۳} -۳\leq -x\leq -۱ \xrightarrow{\times(-۱)} ۳\geq x\geq ۱ \qquad D_{f(۳-x)}=[۱,۳]$$

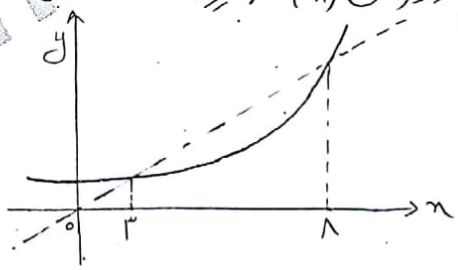
۲- شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ و نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{x-f^{-۱}(x)}$، کدام است؟



۱) $[۲,۰)$ ۲) $[۳,۲)$ ۳) $[۸,۲)$ ۴) $[۳,۸)$

نمودار تابع $f^{-۱}$ قرینه‌ی نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

باید بازه‌ای را پیدا کنیم که در آن $x\geq f^{-۱}(x)$ که طبق نمودار $[۳,۸]$ است.



۳- اگر $f(x)=\sqrt{۳-x}$ و $g(x)=\log_۲(x^۲+۲x)$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $[-۲,۴)$ ۲) $[۰,۲]$ ۳) $[۱,۲)\cup[-۱,-۲]$ ۴) $[۲,۰)\cup(-۲,-۴]$

$$fog(x)=\sqrt{۳-\log_۲(x^۲+۲x)} \longrightarrow \begin{cases} x^۲+۲x>۰ \longrightarrow x(x+۲)>۰ \longrightarrow x<-۲ \;\text{یا}\; x>۰ \\ \log_۲(x^۲+۲x)\leq ۳ \longrightarrow x^۲+۲x\leq ۸ \longrightarrow x^۲+۲x-۸\leq ۰ \end{cases}$$

$$(x+۴)(x-۲)\leq ۰ \longrightarrow -۴\leq x\leq ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک}} [-۴,-۲)\cup(۰,۲]$$

Scanned by CamScanner

۴- اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\sqrt{x+|x+2|}$ برابر D_f باشد، دامنه‌ی تابع $f(-x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $x\leq -1$ ۲) $x\geq -1$ ✓۳) $x\geq 1$ ۴) $x\leq 1$

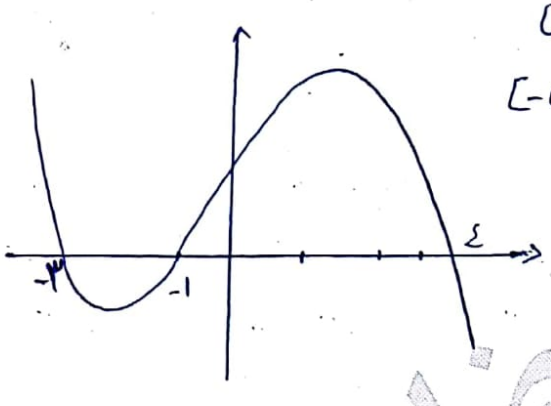
$$x+|x+2|\geq 0 \longrightarrow |x+2|\geq -x \longrightarrow |x+2|^2\geq (-x)^2 \longrightarrow x^2+4x+4\geq x^2 \longrightarrow x\geq -1$$

$$D_{f(-x)}: -x\geq -1 \longrightarrow x\leq 1$$

۵- شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x-2)$ است. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $[-3,0]\cup[1,4]$ ۲) $[-3,1]\cup[2,5]$

۳) $[-5,-3]\cup[1,2]$ ✓۴) $[-5,-3]\cup[2,5]$



نمودار تابع $y=f(x)$ با دو واحد انتقال به سمت چپ و دست آخر یک بازتاب نسبت به محور xها، نمودار تابع $y=f(x-2)$ را به ما می‌دهد. پس دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ لازم است $xf(x)\geq 0$، بنابراین x و $f(x)$ یا هم علامت باشند یعنی یا هر دو مثبت یا منفی. پس مجموعه‌ی مقادیر x که نمودار آن در ناحیه‌ی اول و سوم باشد یا روی محور xها باشد، دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ است. پس دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ می‌شود اجتماع دامنه‌ی تابع $[0,4]\cup[-5,-3]$ است.

۶- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$ و $g(x)=(\frac{1}{4})^x$ باشند، دامنه‌ی تابع fog کدام است. (تجربی خارج ۹۴)

✓۱) $(-\frac{1}{2},+\infty)$ ۲) $(\frac{1}{2},+\infty)$ ۳) $(0,2)$ ۴) $(-1,\frac{1}{2})$

دامنه‌ی تابع g همه‌ی اعداد حقیقی و دامنه‌ی f همان جواب نامعادله‌ی $-x^2+x+2>0$ است.

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-x^2+x+2$	$-$	0	$+$ 0	$-$
		ق ق		

بنابراین $D_g=R$ و $D_f=(-1,2)$

حال دامنه‌ی تابع fog را به دست می‌آوریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g ; g(x)\in D_f\}=\{x\in R: g(x)\in(-1,2)\}=\{x\in R: -1<(\frac{1}{4})^x<2\}$$

$$=\{x\in R:(\frac{1}{4})^x<2\}=\{x\in R: 2^{-2x}<2^1\}=\{x\in R:-2x<1\}=\{x\in R: x>-\frac{1}{2}\}$$

$$=(-\frac{1}{2},+\infty)$$

@tmrnazari.amirnazari

Scanned by CamScanner

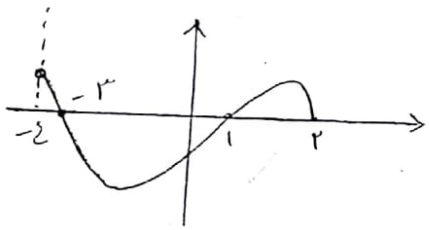
۵- تابع با دامنه ویژه

۱- اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ آن‌گاه دامنه تابع gof کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $[\frac{1}{2}, 1)$ ✓ ۲) $[2, 1)$ ۳) $(1, \frac{1}{2}]$ ۴) $(2, 1)$

با قرار دادن $x=0$ در ضابطه‌ی gof نزدیک‌های ۲ و ۳ حذف می‌شوند و امتحان کردن $x=\frac{1}{2}$ نزدیکی ۴ را حذف می‌کند.

۲- شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه‌ی تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

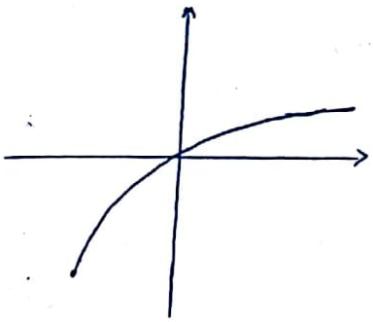


۱) $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$ ۲) $[-3, 2]$
۳) $[-2, 1] \cup [-3, -4]$ ✓ ۴) $[-2, 1] \cup [-3, 0]$

در بازه $[-3, -4]$ y مثبت و x منفی است که $xf(x)$ منفی می‌شود و قابل قبول نیست. در بازه‌ی $[-3, 0]$ y منفی و x هم منفی است که $xf(x)$ مثبت می‌شود و قابل قبول است و در بازه‌ی $[2, 1]$ هم x و هم y مثبت هستند که قابل قبول است.

۳- اگر $f(x) = 1 - (\frac{1}{2})^x$ باشد دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $[-1, 1]$ ۲) $[-\infty, 0]$ ۳) ✓ $[-\infty, +\infty]$ ۴) $(0, +\infty)$



باید زیر رادیکال مثبت باشد یعنی: $xf(x) \geq 0$ پس در واقع هر جا که x و $f(x)$ هم علامت باشند یکی از آن دو صفر باشد جواب می‌شود خواهید دید که در اینجا عام مخرج مشترک را وارد بنای این دامنه عام اعداد حقیقی است.

۴- دامنه‌ی تابع $f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$ به کدام صورت بازه‌ها است؟ (ریاضی ۹۵)

۱) $[-2, 0) \cup (3, 5]$ ۲) $[-2, 0] \cup (3, 5)$
۳) $(-2, -3)$ ۴) $[0, 5]$

Scanned by CamScanner

ردینه‌های ۲ و ۳ روی

$x^2 - 2x \neq 0 \longrightarrow x \neq 0 \longrightarrow x \neq 2$

۵- اگر $f(x) = \text{Arc}\sin(2x-1)$ و $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ دامنه‌ی تابع fog کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) R ✓ ۲) $[0,1]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $(0,+\infty)$

$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$

$f(x) = \sin^{-1}(2x-1) \rightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1 \rightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \rightarrow 0 \leq x \leq 1$

$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \longrightarrow D_g = R$

$D_{fog} = \left\{x \in R \;\middle|\; \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{\oplus} \in [0,1]\right\}$

روی اکسید راطی ⊕ برقرار باشد:

$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} \geq 0 & \text{همواره برقرار} \\ \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1 & \frac{x^2+1>0}{\text{ترتیب وسطین}} \rightarrow x^2 \leq x^2+1 \quad \text{همواره برقرار} \end{cases}$

۶- برد تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (x+|x|)\sqrt{\frac{x-2}{x}}$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $[1,0)$ ۲) $[2,0)$ ۳) $[2,1]$ ۴) $(3,1)$

$\sqrt{\frac{x-2}{x}} \rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \rightarrow D_f = 0 < x \leq 2$

$f(x) = (x+x)\sqrt{\frac{x-2}{x}} = 2\sqrt{x(x-2)} = 2\sqrt{2x-x^2-1+1} = 2\sqrt{1-(x-1)^2}$

$0 \leq (x-1)^2 \leq 1 \xrightarrow{-} -1 \leq -(x-1)^2 \leq 0 \rightarrow 1 \leq 1-(x-1)^2 \leq 1 \rightarrow 2 \leq 2\sqrt{1-(x-1)^2} \leq 2$

محمد رضا نظری
@tmrnazari @mrnnazari

Scanned by CamScanner

$\longrightarrow 0 \le 1-(x-1)^2 < 1 \longrightarrow 0 \le 2\sqrt{\underbrace{1-(x-1)^2}_{f(x)}} < 2 \longrightarrow$ تابع f برد $R_f = [0,2)$

۷- اگر $f(x) = x - [x]$ آنگاه دامنه تابع $g(x) = f(2x-2) - 2f(x)$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $[0,1)$ ۲) $[-1,0)$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\{0,1\}$

نکته:

$$\begin{cases} 1)\ A \in Z : [A+a] = A + [a] \\ 2)\ x \in R : x = [x] + p ;\ 0 \le p < 1 \end{cases}$$

$$g(x) = f(2x-2) - 2f(x) = (2x-2) - [2x-2] - 2x + 2[x] = 2x - 2 - [2x] + 2 - 2x + 2[x]$$

$$\longrightarrow g(x) = -[2x] + 2[x] \xrightarrow{x=[x]+p} g(x) = -[2[x]+2p] + 2[x] \longrightarrow$$

$$g(x) = -2[x] - [2p] + 2[x] = -[2p] \quad (*)$$

حدود: $0 \le p < 1 \longrightarrow 0 \le 2p < 2 \longrightarrow [2p] = 0, 1$ $(**)$

$\xrightarrow{(*),(**)} g(x) = 0, -1 \longrightarrow$ برد تابع g: $R_g = \{-1, 0\}$

۸- اگر $f(x) = 2^x$ باشد دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)}$ به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $R - (-1,1)$ ۲) $[-1,0) \cup (0,1]$

۳) $(-1,0) \cup [1,+\infty)$ ۴✓) $(-\infty,-1] \cup (0,1]$

$$y = \sqrt{f(\frac{1}{x}) - f(x)} \xrightarrow{Dy} f(\frac{1}{x}) - f(x) \ge 0 \longrightarrow 2^{\frac{1}{x}} - 2^x \ge 0 \longrightarrow 2^{\frac{1}{x}} \ge 2^x$$

$$\frac{1}{x} \ge x \longrightarrow \frac{1}{x} - x \ge 0 \longrightarrow \frac{1-x^2}{x} \ge 0 \longrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{\underbrace{x}_{P(x)}} \ge 0$$

x	-1	0	1
$P(x)$	$+\ 0\ -$	$\not\exists$	$+\ 0\ -$

۱۵ ✓ ✓

@tmrnazari @mrhnazari

Scanned by CamScanner

۹- اگر $f(x)=\sqrt{2-x}$ و $g(x)=\log(x^2-15x)$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟ ریاضی خارج ۹۵

۱) $(-\infty,5]\cup[20,25)$
۲) $[-5,0)\cup(15,20]$
۳) $(15,20]$
۴) $(-5,0)$

$D_f: \quad 2-x\geq 0 \longrightarrow 2\geq x \longrightarrow (-\infty,2]$

$D_g: \quad x^2-15x>0 \longrightarrow P=x(x-15)>0$

x	$-\infty$		0		15		$+\infty$
P	+	۰	−	۰	+		

$D_g=(-\infty,0)\cup(15,+\infty)$

$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$

$\{x\in(-\infty,0)\cup(15,+\infty) \mid \log(x^2-15x)\leq 2\}$

$x^2-15x\leq 100$

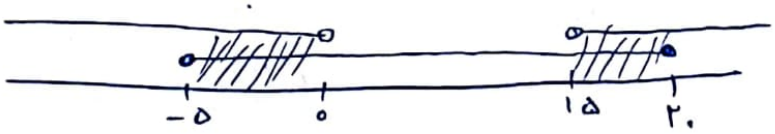
$P=x^2-15x-100\leq 0$

x	$-\infty$		-5		20		
P	+		۰	−	۰	+	

$[-5,20]$

$\Longrightarrow D_{fog}=\big((-\infty,0)\cup(15,+\infty)\big)\cap[-5,20]=$

$[-5,0)\cup(15,20]$ گزینه ۲



محمد رضا نظری
@tmrnazari
@tmrnazari

Scanned by CamScanner

۶. عملیات روی تابع، ترکیب

توابع، وارون توابع

@tmrnazari
محمد رضا نظری

Scanned by CamScanner

۲ـ عملیات روی تابع، ترکیب توابع، وارون توابع

۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\sqrt{x+4} & ; \ x>3 \\ 2x+3 & ; \ x\leq 3 \end{cases}$ مقدار $f(f(0))+f(f(1))$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹ ✓

$$f(f(0))+f(f(1))=f(3)+f(0)=7+2=9$$

۲- اگر $f(x-2)=x^2-4x+5$ آنگاه $f(1-x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

$x\sim x-2$
$-x\sim -x+2$
$1-x\sim -x+4$

۱) $1+x^2$ ۲) $2+x^2$ ۳) $5+4x+x^2$ ۴) $5-4x+x^2$ ✓

$$x\longrightarrow x+4 \longrightarrow f(1-x)=(-x+4)^2-4(-x+4)+5=x^2-4x+5$$

۳- اگر $f(x)=x^2+3x$ ، $g(x)=-\frac{1}{2}x+2$ ، مجموعه طول نقاط اکسترمم تابع gof که در بازه‌ی صورت‌های مرکز متقارن کدام بازه است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $(-2,1)$ ✓ ۲) $(-3,2)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(-4,1)$

ابتدا ضابطه gof را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+3x \\ g(x)=\frac{-1}{2}x+2 \end{cases} \longrightarrow (gof)(x)=g(f(x))=\frac{-1}{2}f(x)+2 \longrightarrow (gof)(x)=\frac{-1}{2}(x^2+3x)+2$$

$$(gof)(x)=\frac{-1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$$

برای به دست آوردن مجموعه نقاط بحرانی کافی است نامعادله‌ی $(gof)(x)>0$ را حل کنیم:

$$(gof)(x)>0 \longrightarrow \frac{-1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2>0 \xrightarrow{\times(-2)} x^2+3x-4<0$$

$$(x-1)(x+4)<0 \longrightarrow -4<x<1 \longrightarrow x\in(-4,1)$$

۴- اگر $f(x)=x+\sqrt{x}$ و $g=\{(1,2),(5,2),(2,0),(3,3)\}$ و $g(f(a))=0$ باشد. عدد a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴ ✓

برای حل کافی است ابتدا $f(a)=t$ را به دست آوریم (⊛)، سپس از معادله‌ی $g(f(a))=0$ نتیجه می‌شود که $g(t)=0$ هم‌چنین با توجه به اینکه زوج مرتب $(2,0)$ عضو تابع g است پس $g(2)=0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} g(t)=0 \\ g(2)=0 \end{cases} \longrightarrow t=2 \xrightarrow{⊛} f(a)=2 \quad ⊛⊛$$

$$f(x)=x+\sqrt{x} \xrightarrow{⊛⊛} a+\sqrt{a}=2$$

که با امتحان گزینه‌ها تنها $a=1$ برقرار است.

محمدرضا نظری @mrnazari@mrnazari

Scanned by CamScanner

۵- ضابطه وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $y=\frac{x}{1-|x|}$; $|x|<1$ ✓

۲) $y=\frac{1-|x|}{|x|}$; $|x|>1$

۳) $y=\frac{x}{|x|-1}$; $|x|>1$

۴) $y=\frac{|x|-1}{x}$; $|x|<1$

می‌دانیم اگر مختصات خطی (α,β) در معادله‌ی یک تابع صدق کند، مختصات نقطه‌ی $(\alpha,-\beta)$ در معادله‌ی وارون آن صدق می‌کند. مختصات نقطه‌ی $(0,0)$ در معادله‌ی تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ صدق می‌کند، پس مختصات نقطه‌ی $(0,0)$ باید در معادله‌ی وارون آن نیز صدق کند. با توجه به این مطلب، گزینه‌های ۲ و ۴ حذف می‌شوند. مختصات نقطه‌ی $(\frac{1}{2},1)$ در معادله‌ی تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ صدق می‌کند. پس مختصات نقطه‌ی $(1,\frac{1}{2})$ باید در معادله‌ی وارون آن نیز صدق کند. با توجه به این مطلب گزینه‌ی ۳ نیز حذف می‌شود.

بنابراین تنها گزینه‌ی ۱ باقی می‌ماند. یعنی ضابطه‌ی وارون تابع $y=\frac{x}{1+|x|}$ به صورت $y=\frac{x}{1-|x|}$; $|x|<1$ است.

۶- اگر $f(x)=(2x-3)^2$ و $g(x)=x+2$ نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع‌اند؟ تجربی ۹۲

۱) -1 ۲) $\frac{1}{2}$ ✓ ۳) 1 ۴) $\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} f(x)=(2x-3)^2 \\ g(x)=x+2 \end{cases} \longrightarrow f(g(x))=(2g(x)-3)^2=(2(x+2)-3)^2=4x^2+4x+1$$

$$\begin{cases} y_1=f(x)=(2x-3)^2=4x^2-12x+9 \\ y_2=f(g(x))=4x^2+4x+1 \end{cases} \xrightarrow[y_1=y_2]{\text{متقاطع هستند}} 4x^2-12x+9=4x^2+4x+1 \longrightarrow$$

$$12x=8 \longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

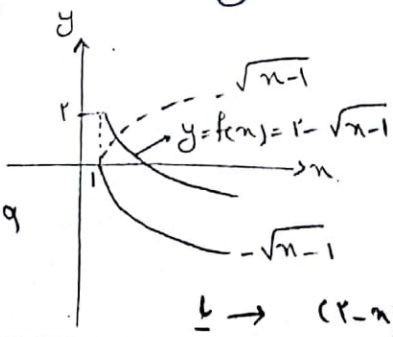
۷- ضابطه‌ی منفکس تابع $y=2-\sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $y=x^2-4x+5$; $x\leq 2$ ✓

۲) $y=-x^2+4x-5$; $x\leq 2$

۳) $y=x^2-4x+5$; $x\geq 1$

۴) $y=-x^2+4x-5$; $x\geq 1$



$$y=f(x)=2-\sqrt{x-1} \longrightarrow \begin{cases} D_f=[1,+\infty) \\ R_f=(-\infty,2] \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\text{متغیرها را عوض می‌کنیم}]{f^{-1}} x=2-\sqrt{y-1} \longrightarrow \sqrt{y-1}=2-x$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}} y-1=(2-x)^2 \longrightarrow y=x^2-4x+5 \longrightarrow D_{f^{-1}}=R_f$$

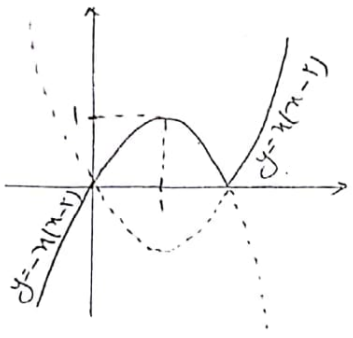
$$\rightarrow \quad (2-x)^2+1\geq 1 \Rightarrow x\leq 2$$

@tmrnazari@mrnazari

Scanned by CamScanner

۸- تابع با ضابطه $y = x|x-2|$، در کدام بازه نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $x<0$; $1-\sqrt{1+x}$ ۲) $x<1$; $1-\sqrt{1-x}$ ۳) $0<x<1$; $1+\sqrt{1+x}$ ۴) $0<x<4$; $1-\sqrt{1-x}$



$$y = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ -x(x-2) & x < 2 \end{cases}$$ نزولی

با توجه به نمودار در بازه $(1,2)$ تابع نزولی است. پس باید ضابطه‌ی تابع $x(x-2)$ باشد.

$1 < x < 2$ و $y = -x(x-2)$ تابع معکوس بنویسیم. چون برد این تابع طبق نمودار $(1,2)$ است، پس دامنه معکوس این تابع باید همین بازه باشد. یعنی گزینه‌های ۱ و ۳ باقی می‌مانند.

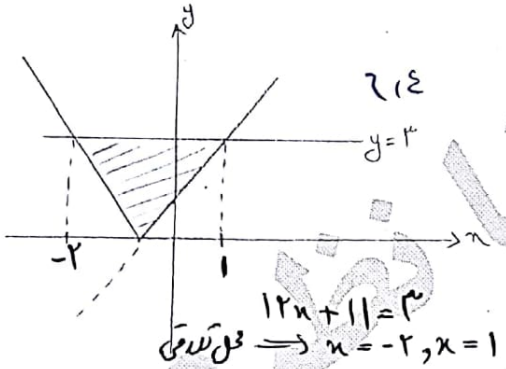
اما نقطه $(0,0)$ روی نمودار تابع است، پس $f^{-1}(0)$ باید در تابع معکوس صدق کند که گزینه ۳ است.

۹- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع gof و خط به معادله‌ی $y=3$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۴/۵ ۴) ۴/۶

$$gof = \sqrt{4(x^2+x)+1} = \sqrt{4x^2+4x+1} = \sqrt{(2x+1)^2} = |2x+1|$$

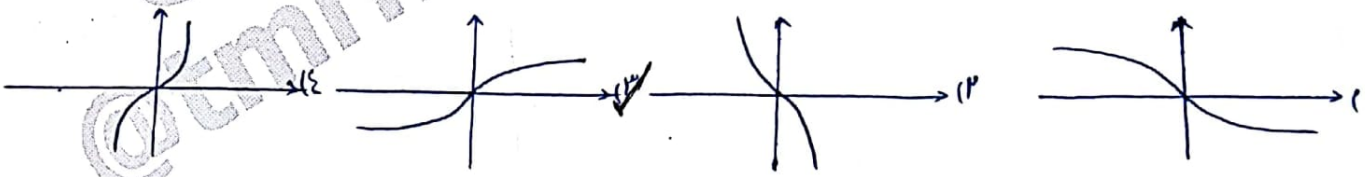
نمودار تابع $|2x+1|$ و $y=3$ را رسم می‌کنیم:



$|2x+1| = 3 \Rightarrow$ حل تساوی $x = -2, x = 1$

مساحت $S = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2} = 4/5$

۱۰- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟ (تجربی ۹۵)



$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \longrightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & x < 0 \end{cases}$$

محمد رضا نظری @mrnazari

Scanned by CamScanner

۱۱- اگر توابع f و g به‌صورت ماشین به‌صورت $x \longrightarrow f \longrightarrow g \longrightarrow 2x$ باشند و $g(x)=2x+4$ مقدار $f(0)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴

$$g(f(x))=2x \Longrightarrow 2f+4=2x \longrightarrow f=\frac{2x-4}{2}$$

$$f(0)=\frac{0-4}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

۱۲- اگر $f(x)=x^2-x-2$ و $f(g(x))=x^2+x-2$ باشد، آنگاه $(f+g)(x)$ کدام گزینه است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $1-x^2$ ✓ ۲) $1+x^2$ ۳) x^2-2x ۴) x^2+2x

$f(x)=x^2-x-2 \longrightarrow f(g(x))=(g(x))^2-g(x)-2$ ⊛

طبق فرض مسأله: $f(g(x))=x^2+x-2$ ⊛⊛

⊛ و ⊛⊛ $\longrightarrow (g(x))^2-g(x)-2=x^2+x-2 \longrightarrow (g(x))^2-g(x)=x^2+x$

$\longrightarrow (g(x)-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \longrightarrow (g(x)-\frac{1}{2})^2=(x+\frac{1}{2})^2$

$$g(x)-\frac{1}{2}=\pm(x+\frac{1}{2}) \longrightarrow \begin{cases} g(x)-\frac{1}{2}=x+\frac{1}{2} \longrightarrow g(x)=x+1 \\ g(x)-\frac{1}{2}=-(x+\frac{1}{2}) \longrightarrow g(x)=-x \end{cases}$$

$$\begin{cases} (f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^2-x-2)+(x+1)=x^2-1 \\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=(x^2-x-2)+(-x)=x^2-2x-2 \end{cases}$$

۱۳- خاصیت‌های وارون تابع $y=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $y=x|x|\,;x\in R$ ✓ ۲) $y=-x^2\,;x<0$ ۳) $y=\pm x^2\,;x\in R$ ۴) $y=\pm x|x|\,;x\in R$

$$y=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$$

$$f^{-1}=\begin{cases} x=\sqrt{y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} y=x^2 & ; x\geq 0 \\ x=-\sqrt{-y} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} x^2=-y \longrightarrow y=-x^2 & ; x<0 \end{cases}$$

$$f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2 & ; x\geq 0 \\ -x^2 & ; x<0 \end{cases} = x|x|$$

@imnazari محمد نظری

Scanned by CamScanner

۱۱- ضابطه‌ی معکوس تابع $y=\begin{cases}\frac{|x|\sqrt{|x|}}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ به کدام صورت است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $y=x\sqrt{|x|};\ x\in R$ ۲) $y=x\sqrt{|x|};\ x\in R-\{0\}$

۳) $y=x|x|;\ x\in R-\{0\}$ ۴) $y=x|x|;\ x\in R$ ✓

$$y=\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}\longrightarrow\begin{cases}(x\to 0^-)\to y=-\sqrt{-x}\to f^{-1}(x)=-x^2\\ (x\to 0^+)\to y=\sqrt{x}\to f^{-1}(x)=x^2\end{cases}\longrightarrow f^{-1}(x)=x|x|,\ x\in R$$

۱۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|2x-6|-|x+1|$ در یک بازه صعودی است. ضابطه‌ی معکوس آن در این بازه کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $x<7;\ -x+8$ ۲) $x<2;\ \frac{1}{2}x+2$

۳) $x>7;\ -6$ ✓ ۴) $x>2;\ -\frac{1}{2}x-1$

$$f(x)=|2x-6|-|x+1|=\begin{cases}-(2x-6)-(-x-1) & x<-1\\ -(2x-6)-(x+1) & -1\le x<3\\ (2x-6)-(x+1) & x\ge 3\end{cases}=\begin{cases}-x+7 & x<-1\\ -3x+5 & -1\le x<3\\ x-7 & x\ge 3\end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع به ازای $x\ge 3$ صعودی است به ازای $x\ge 3$، $y\ge -4$ و داریم:

$$y=x-7\longrightarrow x=y+7\longrightarrow f^{-1}(x)=x+7,\ x\ge -4$$

۱۲- اگر $g(x)=2x+1$ و $(fog)(x)=8x^2+2x+5$ باشند، ضابطه $f(x)$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) $1+2x^2+3x$ ۲) $3+2x-2x^2$

۳) $4+x-2x^2$ ✓ ۴) $2+x+2x^2$

$$\begin{cases}g=2x+1\longrightarrow x=\frac{g-1}{2}\\ f(g)=8x^2+2x+5=8\left(\frac{g-1}{2}\right)^2+2\left(\frac{g-1}{2}\right)+5\end{cases}$$

$$f(g)=2(g-1)^2+2(g-1)+5=2g^2-4g+2+2g-2+5=2g^2-2g+5\longrightarrow$$

۱۳

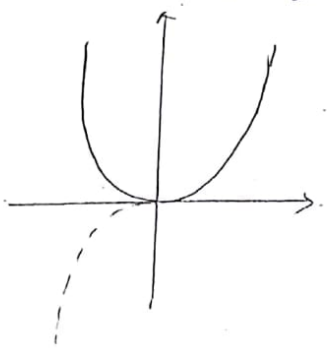
$$f(x)=2x^2-x+5$$

@tmrnazari@mrnazari

Scanned by CamScanner

۱۷- تابع با ضابطه $f(x)=|x^3|$ با دامنه‌ی R کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) نزولی ۲) صعودی ۳) وارون ناپذیر ۴) یک به یک



با رسم نمودار به سادگی مشخص می‌شود که تابع یک به یک و در نتیجه وارون ناپذیر است.

۱۸- اگر $f(x)=x^2+x-2$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار گیرند، برابر کدام بازه است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $(1,0-)$ ۲) $(5,1-)$ ۳) $(1,2-)$ ۴) $(5,1)$

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1) \\ g(x)=\frac{1}{2}(x-3)=\frac{x}{2}-\frac{3}{2} \end{cases} \longrightarrow f(g(x))=(g(x)+2)(g(x)-1)=(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}+2)(\frac{x}{2}-\frac{3}{2}-1)$$

$$(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})(\frac{x}{2}-\frac{5}{2})$$

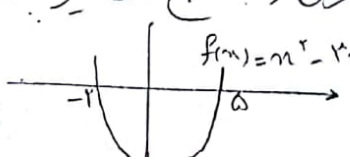
حال برای تعیین مجموعه‌ی طول نقاطی از منحنی fog که در زیر محور xها قرار دارند کافی است نامساوی $fog(x)<0$ را حل کنیم.

$$f(g(x))<0 \longrightarrow (\frac{x}{2}+\frac{1}{2})(\frac{x}{2}-\frac{5}{2})<0 \longrightarrow -1<x<5 \;;\; x\in(-1,5)$$

۱۹- نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=x^2-3x-10$ را حداقل چند واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم تا طول نقطه‌ی تلاقی نمودار حاصل با محور xها غیرمنفی باشد؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۲ ۴) ۳

ابتدا نمودار تابع درجه دوم $f(x)=x^2-3x-10$ را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم توجه داشته باشیم که تقعر این تابع رو به بالا بوده و طول از مبدأ‌های آن (ریشه‌های آن) برابر $x=5$ و $x=-2$ می‌باشند. عرض از مبدأ تابع موقت نیز برابر $-10=y$ است. بنابراین داریم:



@tmrnazari
تدریس خصوصی ریاضی
Scanned by CamScanner

حال با توجه به نمودار رسم شده در بالا، به راحتی نتیجه می‌گیریم که اگر نمودار تابع f را حداقل ۲ واحد به طرف xهای مثبت انتقال دهیم طول نقاط تلاقی نمودار تابع f با محور xها غیر منفی می‌باشد.

۲۰- به ازای کدام مقدار m نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m+2$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول محور مختصات مماس است؟ (خوبه خارج ۹۳)

۱) -4 و 12 ۲) -12 و 4 ۳) -4 و 12 ۴) 12 و 4

برای آنکه نمودار تابع بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس باشد باید معادله‌ی تقاطع تابع را با خط $y=x$ نوشته و Δ ی آن را برابر صفر قرار دهیم. داریم:

$$\begin{cases} y_1 = 2x^2 + (m+1)x + m + 2 \\ y_2 = x \end{cases} \xrightarrow[y_1 = y_2]{\text{تساوی دهم}} 2x^2 + (m+1)x + m + 2 = x \rightarrow \underbrace{2x^2}_{a} + \underbrace{mx}_{b} + \underbrace{m+2}_{c} = 0$$

Δ معادله‌ی تقاطع: $b^2 - 4ac = 0 \rightarrow m^2 - 4(2)(m+2) = 0 \rightarrow m^2 - 8m - 48 = 0$

$$\begin{cases} m = 12 \\ m = -4 \end{cases}$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m معادله‌ی تقاطع ریشه‌ی مثبت خواهد داشت؟

$$\begin{cases} m = 12 \rightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0 \rightarrow 2(x+3)^2 = 0 \rightarrow x = -3 \text{ ق ق} \\ m = -4 \rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow 2(x-1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

محمد رضا نظری
@tmrnazari

Scanned by CamScanner

۶- عملیات روی توابع، ترکیب توابع، وارون توابع

۱- توابع f و g به صورت $f=\{(۷,۱),(۵,۰),(۲,۳),(۱,۲)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,۱),(۳,۹),(a,b)\}$ تعریف شده‌اند. اگر $fog=\{(۲,۰),(۱,۰)\}$ و $gof=\{(۱,۰),(۳,۰)\}$ باشند دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $(۰,۳)$ ✓۲) $(۰,۰)$ ۳) $(۳,۰)$ ۴) $(۰,۱)$

$(۰,۰)\in f \longrightarrow f(۰)=۵$

$gof(۰)=۱ \longrightarrow g(f(۰))=۱ \longrightarrow g(۵)=۱ \xrightarrow{(b,۱)\in g} b=۵$

$(۲,۰)\in fog \longrightarrow ۰\in D_g \xrightarrow[\text{۳ و ۵ و ۹ وجود دارند}]{\text{در دامنه‌ی } g \text{، اعداد}} a=۰$

$(a,b)=(۰,۵)$

۲- به ازای کدام مقدار a، ضابطه‌ی یک تابع فرد است؟ (ریاضی ۹۰)

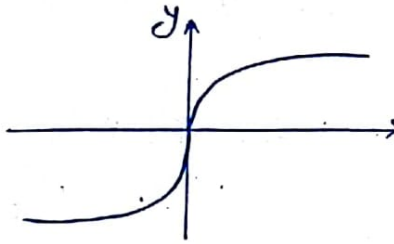
$$f(x)=\begin{cases}۲\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -\sqrt{ax} & x<۰\end{cases}$$

✓۱) -۴ ۲) ± ۴ ۳) ۴ ۴) هیچ مقدار a

واضح است که به ازای $x<۰$ عبارت $\sqrt{ax}$ وقتی داخل رادیکال کمیت a عددی مثبت باشد. پس پاسخ مثبت گزینه‌ی ۱ یا ۴ است. به ازای $a=-۴$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}۲\sqrt{x} & x\geq ۰\\ -۲\sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

هم‌چنین می‌دانیم نمودار $y=-\sqrt{-x}$ از قرینه‌ی $y=\sqrt{x}$ ابتدا نسبت به محور yها و سپس نسبت به محور xها حاصل می‌شود. پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



گزینه‌ی ۱) جواب است ←

۳- اگر $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{۱+x^۲}}$ باشد، ضابطه‌ی تابع $f^{-۱}(\sin x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

۱) $\tan x$ ۲) $\dfrac{|\cos x|}{\sin x}$ ۳) $\cot x$ ✓۴) $\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$

محمدرضا نظری
@tmrnazari
@mrnazari

Scanned by CamScanner

$y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} x=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \longrightarrow x^2+x^2y^2=y^2 \longrightarrow x^2y^2-y^2=-x^2$

$y^2(x^2-1)=-x^2 \longrightarrow y^2=\frac{x^2}{1-x^2} \xrightarrow{-1<x<1} y=\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow{x \text{ و } y \text{ هم‌علامت‌اند}}$

$y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \longrightarrow f^{-1}(\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۴- اگر $g(x)=2x-1$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x-3}$ مقدار $f(3)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) -4 ✓ ۲) -2 ۳) 2 ۴) 4

$\begin{cases} f(g(x))=\frac{x}{x-3} \\ g(x)=2x-1 \end{cases} \longrightarrow f(2x-1)=\frac{x}{x-3}$ ⊛

$2x-1=3 \longrightarrow x=2 \xrightarrow{⊛} f(3)=\frac{2}{2-3}=-2$

۵- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x^2-2x-3$ با دامنه‌ی $\{x : |x-1|<2\}$ چگونه است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) ✓ منفی ۲) مثبت ۳) صعودی ۴) نزولی

دامنه: $|x-1|<2 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} (x-1)^2<4$ ⊛

از طرفین با مربع کامل کردن ضابطه‌ی f داریم:

$f(x)=x^2-2x-3 \longrightarrow f(x)=x^2-2x+1-4=(x-1)^2-4$

بنابراین در ⊛ چون $(x-1)^2<4$ و در نتیجه $(x-1)^2-4<0$ است. بنابراین تابع همواره منفی است.

۶- اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ ضابطه‌ی تابع fog کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $2x^2-7x+3$ ۲) $2x^2-3x+7$ ✓ ۳) $4x^2-2x+13$ ۴) $4x^2-4x+11$

$g(f(x))=8x^2+22x+20=2(2x+3)^2-(2x+3)+5 \longrightarrow g(x)=2x^2-x+5$

$fog=f(g(x))=2(2x^2-x+5)+3=4x^2-2x+13$

Scanned by CamScanner

۷- تابع $f(x)=x^2+2x+1$ با دامنه‌ی $(-\infty,-1)$ معکوس‌پذیر است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟ (ریاضی ۹۲)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓۴) غیر متقاطع

هر تابع با معکوسش در $y=x$ متقاطع هستند. بنابراین داریم:

$y=x \longrightarrow x^2+2x+1=x \longrightarrow x^2+x+1=0 \longrightarrow \Delta=1-4=-3<0 \longrightarrow$ غیرمتقاطع

۸- اگر $g(x)=2x-3$ و $(fog)(x)=4(x^2-4x+5)$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) x^2-4x+3 ۲) x^2-2x+5 ✓۳) $x^2-12x+45$ ۴) x^2-2x+3

$g(x)=2x-3 \longrightarrow x=\frac{g+3}{2}$, $(fog)(x)=4(x^2-4x+5)=4[(x-2)^2+1]=$

$4\left[\left(\frac{g+3}{2}-2\right)^2+1\right]=4\left[\left(\frac{g-1}{2}\right)^2+1\right]=4\left[\frac{(g-1)^2}{4}+1\right]=(g-1)^2+4=g^2-2g+5 \longrightarrow$

$f(x)=x^2-2x+5$

۹- دو تابع با مجموعه‌ی نقاط $\{(1,8),(7,4),(2,1),(4,3),(5,2)\}$ g و $f(x)=2x-5$ معکوس‌پذیر هستند. اگر $(f^{-1}og)(a)=6$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓۴) ۴

$f^{-1}(g(a))=6 \longrightarrow f(6)=g(a)=2\times6-5 \longrightarrow g(a)=7 \longrightarrow a=4$

۱۰- دو تابع $f=\{(4,3),(5,4),(3,2),(2,1)\}$ و $g=\{(2,3),(1,2),(3,1),(4,5)\}$ معکوس‌پذیر هستند. تابع $f^{-1}og^{-1}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) $\{(4,3),(1,2),(4,4)\}$ ۲) $\{(3,4),(5,5),(1,3)\}$

۳) $\{(4,4),(1,2),(2,1)\}$ ✓۴) $\{(5,5),(3,1),(2,2)\}$

@tmrnazari@mr.nazari

Scanned by CamScanner

$g^{-1}of^{-1} = (fog)^{-1}$

$x=2 : f(g(2)) = f(1) = 2 \longrightarrow (2,2) \in fog$

$x=3 : f(g(3)) = f(2) = 4 \longrightarrow (3,4) \in fog$

$x=0 : f(g(0)) = f(0) = 0 \longrightarrow (0,0) \in fog$

$\Rightarrow fog = \{(2,2),(3,4),(0,0)\} \longrightarrow (fog)^{-1} = \{(2,2),(4,3),(0,0)\}$

۱۱- اگر $f(x) = \text{Arc}\sin(2x-1)$ و $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$، آنگاه دامنه‌ی تابع fog کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۰)

۱) R ۲) $[0,1]$ ۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,+\infty)$

$f(x) = \sin^{-1}(2x-1) \longrightarrow -1 \leq 2x-1 \leq 1 \longrightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \longrightarrow 0 \leq x \leq 1$

$g(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \longrightarrow D_g = R$

$$D_{fog} = \left\{ x \in R \;\middle|\; \underbrace{\frac{x^2}{x^2+1}}_{\circledast} \in [0,1] \right\}$$

برای اینکه رابطه‌ی $(\circledast)$ برقرار باشد باید:

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} < 1 \longrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+1} \geq 0 & \text{(همواره برقرار)} \\ \frac{x^2}{x^2+1} < 1 & \frac{x^2+1>0}{\text{طرفین وسطین}} \longrightarrow x^2 < x^2+1 \quad \text{(همواره برقرار)} \end{cases}$$

درنتیجه تابع fog به ازای هر $x \in R$ تعریف می‌شود و $D_{fog} = R$

۱۲- اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ تابع $f(x) - (f(\sqrt{x}))^2$ چگونه است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) ثابت ✓ ۲) صعودی ۳) نزولی ۴) یک به یک

$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x} \qquad (f(\sqrt{x}))^2 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \longrightarrow$

$(f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = 2$

محمد رضا نظری
@mrnazari
@tmrnazari

Scanned by CamScanner

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|x|}{x}\sqrt{1-x^2}$; $x^2\neq 1$ و $f(0)=0$ ضابطه‌ی وارون آن برابر کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) $f(x)$ ✓ ۲) $-f(x)$ ۳) $xf(x)$ ۴) $-xf(x)$

با توجه به تعریف تابع f در صورت سوال مرزبان دیدکه f تابعی حافظ علامت است. از خاصیتی دیگر ترکیب هر تابع با وارون تابع‌ها نی را نتیجه می‌دهد که این تابع نیز بنا بر تعریف فوق حافظ علامت می‌باشد. با کنار هم گذاشتن این معلومات و آنکه $f\circ f^{-1}=f^{-1}\circ f=I$ می‌توان نتیجه گرفت که تابع f^{-1} نیز به ناچار تابعی حافظ علامت خواهد بود. حال بدی آنکه مسئله حل شود کافی است وارون تابع $y=\sqrt{1-x^2}$ ها سیدکنیم که برابر است با:

$$y^2=1-x^2 \longrightarrow x^2=1-y^2 \longrightarrow x=\pm\sqrt{1-y^2}$$

که ضابطه‌ی وارون همانند ضابطه‌ی تابع اولیه است.

۱۴- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=|2x-4|-2x$ در بازه‌های وارون پذیر است. ضابطه‌ی $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $x\leq 4$ و $1+\frac{1}{4}x$ ۲) $x<4$ و $1-\frac{1}{4}x$ ۳) $x\leq 4$ و $1-\frac{1}{4}x$ ۴) $x\geq 4$ و $1+\frac{1}{4}x$

$$\begin{cases} x>2: f(x)=2x-(-(2x-4))=2x+4-2x=4 \text{ ثابت} \longrightarrow \text{غیریک‌به‌یک} \longrightarrow \text{غیروارون پذیر} \\ x\leq 2: f(x)=2x-(-(2x-4))=4x-4 \text{ (یک‌به‌یک و وارون پذیر)} \checkmark \end{cases}$$

$$x\leq 2 \longrightarrow y=4x-4 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم}} \begin{cases} x=4y-4 \longrightarrow y=\frac{x+4}{4}=\frac{1}{4}x+1 \\ x\leq 4 \end{cases}$$

$$\longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{4}x+1, x\leq 4$$

۱۵- دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ; x\geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x<0\end{cases}$ و g از $\{(3,-4),(2,-3),(-2,1),(-1,2)\}$ معرف‌اند. اگر $(fg)(a)=3$ باشد، a کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) -4 ۲) -1 ۳) 2 ۴) 4

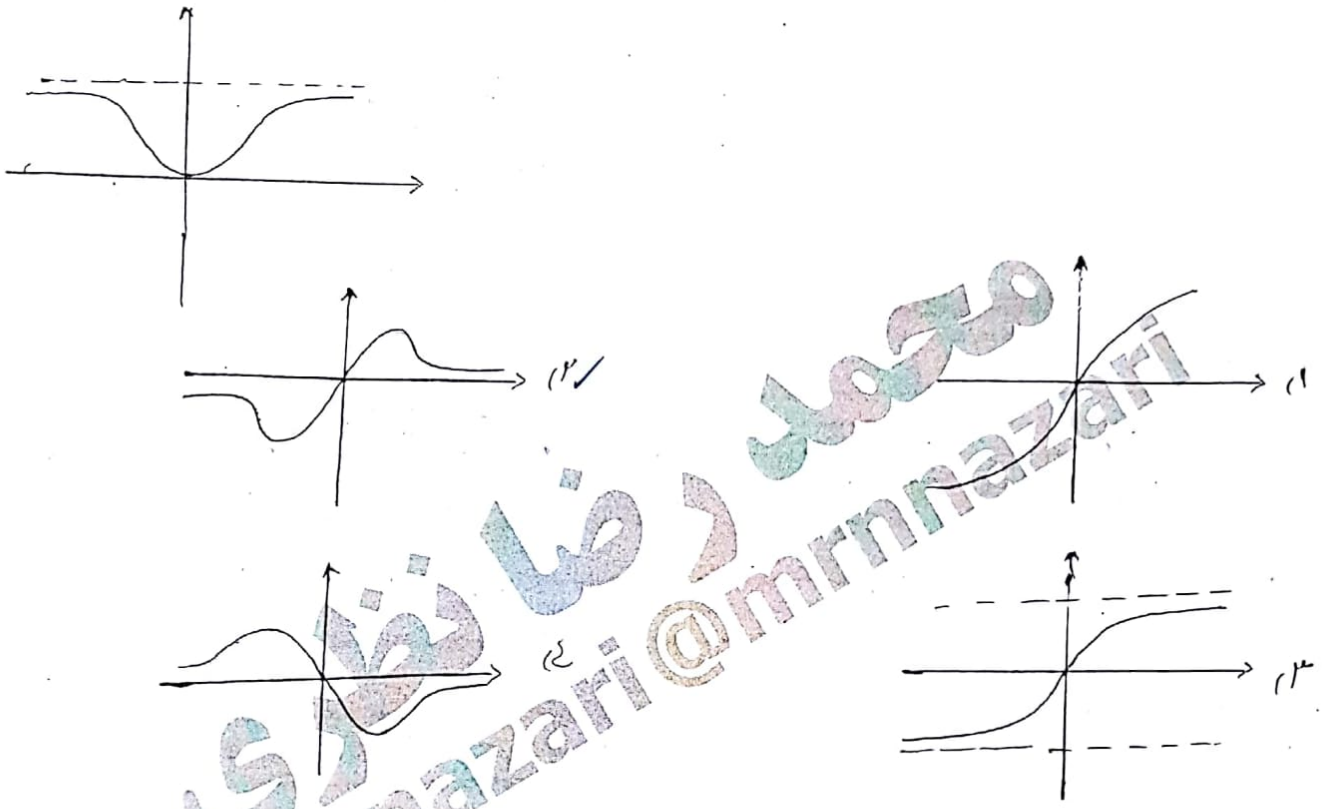
Scanned by CamScanner

$g^{-1}(f(a))=2 \rightarrow g(2)=f(a) \xrightarrow{(2,-2)\in g} f(a)=-2$

با توجه به ضابطه‌ی f چون $\sqrt{x}\geq 0$ و $-\sqrt{-x}<0$، پس:

$f(a)=-\sqrt{-a}=-2 \rightarrow \sqrt{-a}=2 \rightarrow -a=4 \rightarrow a=-4$

۱۶- شکل روبرو نمودار تابع $f(x)=y$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟ (ریاضی خارج ۹۳)



با توجه به نمودار f تقعر تابع در نقطه‌ی x_0 عوض شده و چون مماس در آن وضعیت خود را حفظ کرده پس نقطه‌ی عطف است.
لذا مقدار f' که در $x=x_0$ برابر صفر است، مقدارش با افزایش x تا نقطه‌ی $x=x_0$ افزایش می‌یابد و از آنجا به بعد مقدار f' کاهش می‌یابد تا به صورت حدی به مقدار صفر برسد. هم‌چنین چون تابع f زوج است لذا f' فرد بوده و در نتیجه فقط نمودار (۲) قابل قبول است.

۱۷- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=A(2)^{Bx}$ و خط به معادله‌ی $y=\frac{5}{2}x$ در دو نقطه به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند. مقدار $f^{-1}(10)$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۵)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ✓ ۴) ۸

$(2,\frac{5}{2}) \rightarrow A(2)^{2B}=\frac{5}{2}$ $\xrightarrow{\text{تقسیم بر هم}}$ $2^{-2B}=\frac{1}{2}=2^{-1} \Rightarrow B=\frac{1}{2} \Rightarrow A=\frac{5}{4}$

$(4,5) \rightarrow A(2)^{4B}=5$

$f(x)=\frac{5}{4}(2)^{\frac{x}{2}}$ $\xrightarrow[\Rightarrow f(a)=10]{f^{-1}(10)=a}$ $f(a)=\frac{5}{4}(2)^{\frac{a}{2}}=10 \Rightarrow 2^{\frac{a}{2}}=8=2^3$

$\Rightarrow a=6$

محمدرضا نظری @mrnazari

Scanned by CamScanner