۱۰. مشتــق

« ۱۰- مشتق »

۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{36}{x^2}$، آهنگ متوسط تابع از $x_1=2$ تا $x_2=3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۱ ۲) ۱/۵ ۳) ۲ ۴) ۲/۵

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-9}{3-2}=-5$, $f'(x)=\frac{-72}{x^3} \to f'(\sqrt[3]{12})=\frac{-72}{12}=-6$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(\sqrt[3]{12})=-5-(-6)=1$

۲- مقدار مشتق تابع $y=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)$ به ازای $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) $\frac{-1}{4}$ ۲) $\frac{-1}{8}$ ۳) $\frac{1}{8}$ ۴) $\frac{1}{4}$

$y'=-2\times\frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{4}\right)$ $x=\frac{\pi}{3}\to y'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{-1}{4}\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{-1}{8}$

۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x\sqrt{x}+|x-1|$، مقدار $f'_+(1)+3f'_-(1)$ کدام است؟ (تجربی ۹۰)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

$f(x)=\begin{cases} x\sqrt{x}+x-1 & x\geq 1\\ x\sqrt{x}-x+1 & x<1\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{x}+1 & x>1\\ \frac{3}{2}\sqrt{x}-1 & x<1\end{cases}$

$\begin{cases} f'_+(1)=\frac{5}{2}\\ f'_-(1)=\frac{1}{2}\end{cases} \longrightarrow f'_+(1)+3f'_-(1)=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$

۴- خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $\ln(x^2-y)=\sqrt{y+1}-x$ در نقطه‌ی $(2,3)$ نیمساز ناحیه‌ی اول را، با کدام طول قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۰)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

$\ln(x^2-y)=\sqrt{y+1}-x \longrightarrow \frac{2x-y'}{x^2-y}=\frac{y'}{2\sqrt{y+1}}-1 \xrightarrow{(2,3)} 4-y'=\frac{y'}{4}-1$

$16-4y'=y'-4 \longrightarrow 5y'=20\to y'=4$ خط مماس: $y-3=4(x-2) \xrightarrow{y=x} x-3=4x-8$ $3x=5$ $x=\frac{5}{3}$

۵- مقدار مشتق $\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x}$ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (تجربی ۹۱)

۱) $\frac{4}{9}$ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{9}$

$$y=\frac{1-\cos^2 x}{2-\sin^2 x} \longrightarrow y'=\frac{(1-\cos^2 x)'(2-\sin^2 x)-(2-\sin^2 x)'(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$y'=\frac{(2\sin x\cos x)(2-\sin^2 x)-(-2\sin x\cos x)(1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}=\frac{2\sin x\cos x(2-\sin^2 x+1-\cos^2 x)}{(2-\sin^2 x)^2}$$

$$=\frac{2\sin x\cos x(3-(\sin^2 x+\cos^2 x))}{(2-\sin^2 x)^2}$$

با استفاده از اتحاد مثلثاتی می‌توان نوشت: $\begin{cases} 2\sin x\cos x=\sin 2x \\ \sin^2 x+\cos^2 x=1 \end{cases}$

$$y'=\frac{(\sin 2x)(3-1)}{(2-\sin^2 x)^2} \longrightarrow y'=\frac{2\sin 2x}{(2-\sin^2 x)^2}$$

پس مقدار آن به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ برابر است با:

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\left(2-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2}=\frac{2\times 1}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{8}{9}$$

۶- عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله‌ی $y=\ln\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$ در نقطه $x=\frac{\pi}{2}$ واقع بر آن کدام است؟ (تجربی ۹۲)

۱) $\frac{-\pi}{4}$ ۲) $\frac{-\pi}{2}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\sqrt{\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1+\cos\frac{\pi}{2}}}=\ln 1=0 \longrightarrow A=\left(\frac{\pi}{2},0\right)$$

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}=\ln\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\sin x-\ln(1-\cos x)\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{-\sin x}{1+\cos x}\right) \longrightarrow m_{\text{مماس}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(0-\frac{1}{1+0}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{معادله‌ی خط مماس}} y-0=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \xrightarrow{x=0} \text{عرض از مبدأ} \Rightarrow y=-\frac{\pi}{4}$$

۷- مشتق تابع $y=2\sin^2(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4})$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲) $\frac{-1}{2}$ ۳) $\frac{-1}{4}$ ۴) $\frac{-1}{8}$

$y=\sin^2 u \longrightarrow y'=u'\sin 2u$

$y=2\sin^2(\underbrace{\frac{\pi}{6}-\frac{x}{4}}_{u}) \longrightarrow y'=2\times(\frac{-1}{4})\sin(\underbrace{\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}}_{2u}) \longrightarrow y'(\frac{\pi}{3})=\frac{-1}{2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{2}=$

۸- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=(2x+1)^{\frac{-1}{2}}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطهٔ $x=4$ تا $x=12$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطهٔ $x=4$ چه مقدار بیشتر است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $\frac{7}{540}$ ۲) $\frac{11}{540}$ ۳) $\frac{7}{270}$ ۴) $\frac{11}{270}$

$f(x)=(\underbrace{2x+1}_{u})^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}} \longrightarrow f'(x)=nu^{n-1}\cdot u'=\frac{-1}{2}(2x+1)^{\frac{-3}{2}}\times 2$

آهنگ متوسط تغییر تابع از $x_1=4$ تا $x_2=12$ $=\frac{f(12)-f(4)}{12-4}=\frac{\frac{1}{\sqrt{25}}-\frac{1}{\sqrt{9}}}{8}=\frac{\frac{1}{5}-\frac{1}{3}}{8}=\frac{\frac{-2}{15}}{\frac{8}{4}}=\frac{-1}{60}$

آهنگ لحظه‌ای در $x=4$ $=f'(4)=\frac{-1}{2}(\underbrace{9}_{3^2})^{\frac{-3}{2}}\times 2=\frac{-1}{2}\times\frac{1}{27}\times 2=\frac{-1}{27}$

آهنگ متوسط - آهنگ لحظه‌ای $=\frac{-1}{60}-(-\frac{1}{27})=\frac{-27+60}{60\times 27}=\frac{\overset{11}{\cancel{33}}}{60\times\underset{9}{\cancel{27}}}=\frac{11}{540}$

۹- در تابع ضمنی $4\sqrt{xy}+\frac{1}{y}-2x=1$، تابع y برحسب تغییر x منظور شده است. معادله خط مماس بر منحنی آن در نقطه $(4,1)$ کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) $y+2x=9$ ۲) $2y-x=-2$ ۳) $3y+x=7$ ۴) $3y-x=-1$

$f(x,y)=4\sqrt{xy}+\frac{1}{y}-2x-1=0 \longrightarrow y'_x=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{4\sqrt{y}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-2}{4\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{y}}+\frac{-1}{y^2}}$

$m_{مماس}=y'(4,1)=-\frac{4(1)(\frac{1}{4})-2}{4(2)(\frac{1}{2})-1}=-\frac{-1}{3}=\frac{1}{3}$

حال با معلوم بودن شیب خط مماس و مختصات نقطه‌ی تماس، معادله‌ی مماس به صورت زیر است:

$$y-1=\frac{1}{3}(x-4) \longrightarrow 3y-x=-1$$

۱۰- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin^2 x-\cos 2x & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ a\tan x+b\sin 2x & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟ (تجربی ۹۳)

۱) -1 ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 1

$$f'(x)=\begin{cases}\sin 2x+2\sin 2x=3\sin 2x & 0<x<\frac{\pi}{4}\\ a(1+\tan^2 x)+2b\cos 2x & \frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

برای این‌که تابع f در $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق‌پذیر باشد باید:

۱) تابع f در $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته باشد. داریم:

$$\begin{cases} x=\frac{\pi}{4} \text{ حد چپ و مقدار تابع در } =\frac{1}{2}\\ x=\frac{\pi}{4} \text{ حد راست و مقدار تابع در } =a+b\end{cases} \xrightarrow{\text{مقدار = حد راست = حد چپ}} a+b=\frac{1}{2} \quad (1)$$

۲) مشتق راست و مشتق چپ تابع در $x=\frac{\pi}{4}$ برابر باشند. داریم:

$$\begin{cases} f'_-(\frac{\pi}{4})=3\\ f'_+(\frac{\pi}{4})=2a\end{cases} \xrightarrow{f'_+=f'_-} 2a=3 \longrightarrow a=\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله (۱)}} b=-1$$

۱۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه‌ی $x=1$ با نمو تغییر ۰٫۲۱، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه چقدر کمتر است؟ (تجربی ۹۴)

۱) $\frac{1}{42}$ ۲) $\frac{1}{21}$ ۳) $\frac{3}{42}$ ۴) $\frac{3}{21}$

آهنگ آنی: $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{1}}=\frac{1}{2}$

آهنگ متوسط: $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\sqrt{1.21}-\sqrt{1}}{0.21}=\frac{0.1}{0.21}=\frac{10}{21} \longrightarrow \frac{1}{2}-\frac{10}{21}=\frac{21-20}{42}=\frac{1}{42}$

۱۲- اگر $f(x)=\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}|x|$ و $g(x)=4x+|x|$ باشند، مشتق تابع fog کدام است؟ (تجربی ۹۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) مشتق ندارد

$$g(x)=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ 3x & x<0\end{cases} \longrightarrow |g(x)|=\begin{cases}5x & x\geq 0\\ -3x & x<0\end{cases} \qquad fog(x)=\frac{4}{5}g(x)-\frac{1}{5}|g(x)|$$

$$fog(x)=\begin{cases}\frac{4}{5}(5x)-\frac{1}{5}(5x)=4x-x=3x & x\geq 0\\ \frac{4}{5}(3x)-\frac{1}{5}(-3x)=\frac{12}{5}x+\frac{3}{5}x=3x & x<0\end{cases}\longrightarrow fog(x)=3x\rightarrow (fog(x))'=$$

۱۳- خط مماس بر منحنی به معادله $y=\sqrt{2x}\,e^{2-x}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ (تجربی ۹۴)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ✓ ۴) ۶

$$x_0=2\longrightarrow y_0=\sqrt{4}e^0=2\longrightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{2x}}e^{2-x}-\sqrt{2x}\,e^{2-x}\longrightarrow m=y'(2)=\frac{1}{\sqrt{4}}e^0$$

$$\sqrt{4}e^0=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

معادله خط: $y-y_0=m(x-x_0)\longrightarrow y-2=-\frac{3}{2}(x-2)\xrightarrow{x=0}y-2=-\frac{3}{2}(0-2)\rightarrow y=2+3=5$

۱۴- در نقطه‌ای از منحنی $x+\sqrt{xy}+y=12$ خط مماس بر منحنی عمود بر نیمساز ربع اول است. طول نقطه تماس کدام است؟ (تجربی ۹۵)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ✓ ۴) ۶

$$\text{شیب مماس}=-\frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}}{1+\frac{x}{2\sqrt{xy}}}=-\frac{1}{\text{شیب نیمساز ربع اول}}=-1\longrightarrow 1+\frac{y}{2\sqrt{xy}}=1+\frac{x}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{y}{2\sqrt{xy}}=\frac{x}{2\sqrt{xy}}\longrightarrow x=y\longrightarrow x+\sqrt{x^2}+x=12\longrightarrow x+|x|+x=12$$

$$\begin{cases}x>0\rightarrow 3x=12\rightarrow x=4 \checkmark\\ x<0\rightarrow x=12 \quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۵- در تابع با ضابطه $f(x)=\frac{x}{x-1}$، آهنگ متوسط از $x_1=2$ تا $x_2=5$ برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x=\alpha$ است. α کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) ۲/۵ ۲) $1+\sqrt{3}$ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

آهنگ متوسط تغییر تابع f از $x=x_1$ تا $x=x_2$ برابر است با:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x}{x-1} \\ x_1=2\ ,\ x_2=5 \end{cases} \longrightarrow \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\frac{5}{4}-\frac{2}{1}}{5-2} = \frac{-\frac{3}{4}}{3} = -\frac{1}{4}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در $x=x_0$ برابر $f'(x_0)$ است پس:

$$f(x)=\frac{x}{x-1} \longrightarrow f'(x)=\frac{1(x-1)-1(x)}{(x-1)^2}=\frac{-1}{(x-1)^2} \longrightarrow f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

طبق فرض مسئله باید مقداری از α را بیابیم که در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$-\frac{1}{(\alpha-1)^2}=-\frac{1}{4} \longrightarrow (\alpha-1)^2=4 \longrightarrow \alpha-1=\pm 2 \longrightarrow \begin{cases}\alpha=3\\ \alpha=-1\end{cases}$$

۱۶- مقدار مشتق تابع $y=\cos^2\frac{\pi}{3x}$ به ازای $x=4$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{\pi}{96}$ ۲) $\frac{\pi}{72}$ ۳) $\frac{\pi}{48}$ ۴) $\frac{\pi}{32}$

$$y=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)^2 \longrightarrow y'=\left(\cos\frac{\pi}{3x}\right)'\cdot\left(2\cos\frac{\pi}{3x}\right) \longrightarrow y'=\left(\frac{\pi}{3x}\right)'\left(-\sin\frac{\pi}{3x}\right)\left(2\cos\frac{\pi}{3x}\right) \longrightarrow$$

$$y'=\frac{-\pi}{3x^2}\left(-2\sin\frac{\pi}{3x}\cos\frac{\pi}{3x}\right)$$

با توجه به اتحاد $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$ می‌توان نوشت:

$$y'=\frac{\pi}{3x^2}\sin\frac{2\pi}{3x} \longrightarrow y'(4)=\frac{\pi}{3(4)^2}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{48}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{96}$$

۱۷- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x>1\\ ax+b & ; x\leq 1\end{cases}$ مقدار $f(1)$ موجود است. b کدام است؟ (تجربی خارج ۹۰)

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{7}{3}$ ۳) $\frac{8}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$ ✓

برای آنکه $f(1)$ موجود باشد، باید تابع f در $x=1$ پیوسته باشد:

$$\begin{cases}\sqrt[3]{(2x+6)^2}\ ;\ x>1 \longrightarrow \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[3]{(2x+6)^2}=\sqrt[3]{(2+6)^2}=4\\[2ex] ax+b\ ;\ x\leq1 \longrightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax+b)=a+b\end{cases}$$

شرط پیوستگی در $x=1$ آن است که:

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x) \longrightarrow a+b=4 \ \circledast$$

همچنین باید مشتق چپ و راست تابع f در $x=1$ هم برابر باشند :

$$\begin{cases} \left((2x+6)^{\frac{2}{3}}\right)' = 2\times\frac{2}{3}\times(2x+6)^{\frac{2}{3}-1} = \frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2x+6}} \quad ; \quad x>1 \\ (ax+b)' = a \quad ; \quad x<1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \frac{4}{3}\times\frac{1}{\sqrt[3]{2+6}} = \frac{2}{3} \\ f'_-(1) = a \end{cases} \longrightarrow a = \frac{2}{3} \xrightarrow{*} b = 4-\frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$

۱۸- عرض از مبدأ خط قائم بر منحنی به معادله‌ی $y^2 = y\ln(x^2-3)+2x$ در نقطه‌ی $(2,-2)$ کدام است؟

۱) $-\frac{2}{3}$ ✓ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$ (تجربی خارج ۹۰)

y را تابعی از x در نظر گرفته و از طرفین معادله نسبت به x مشتق می‌گیریم :

$$y^2 = y\ln(x^2-3)+2x \longrightarrow 2yy' = y'\ln(x^2-3)+y\times\frac{2x}{x^2-3}+2$$

با قرار دادن $x=2$ و $y=-2$ مقدار y' را در نقطه‌ی $A(2,-2)$ می‌یابیم :

$$2y'(-2) = y'\ln(1)+(-2)\times\frac{4}{1}+2 \longrightarrow -4y' = 0-8+2 \longrightarrow y' = \frac{3}{2}$$

بنابراین شیب خط قائم بر منحنی در نقطه‌ی $A(2,-2)$ برابر است با :

$$m = \frac{-1}{\frac{3}{2}} = \frac{-2}{3}$$

معادله‌ی خط قائم در نقطه‌ی A : $y-y_A = m(x-x_A) \longrightarrow y+2 = \frac{-2}{3}(x-2) \xrightarrow{x=0} y+2 = \frac{4}{3}$ $\boxed{y=}$

۱۹- مقدار مشتق عبارت $\sqrt{1+\tan^2\frac{1}{x}}$ به ازای $x=\frac{3}{\pi}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۱)

۱) $\frac{-2\pi^2\sqrt{3}}{9}$ ✓ ۲) $\frac{-2\pi^2}{9}$ ۳) $\frac{2\pi^2}{9}$ ۴) $\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$

$$y = \sqrt{\underbrace{1+\tan^2\frac{1}{x}}_{u}} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{(1+\tan^2\frac{1}{x})'}{2\sqrt{1+\tan^2\frac{1}{x}}} = \frac{(2\tan\frac{1}{x})(-\frac{1}{x^2})(1+\tan^2\frac{1}{x})}{2\sqrt{1+\tan^2\frac{1}{x}}} \longrightarrow$$

$$y'(\frac{3}{\pi}) = \frac{2\tan\frac{\pi}{3}(-\frac{\pi^2}{9})(1+\tan^2\frac{\pi}{3})}{2\sqrt{\ldots}} = \frac{2(\sqrt{3})(-\frac{\pi^2}{9})(3+1)}{2\sqrt{1+3}} = \frac{-\frac{8\sqrt{3}}{9}\pi^2}{\ldots} = -\frac{2\pi^2\sqrt{3}}{9}$$

۲۰- اندازه‌ی مشتق تابع $y=\ln e^{\sqrt{\sin x}}$ در نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{6}$ واقع بر آن کدام است؟ (تجربی خارج ۹۲)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ ۲) $\frac{\sqrt{6}}{8}$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ✓

$$y=\ln e^{\sqrt{\sin x}} \longrightarrow y=\sqrt{\sin x} \longrightarrow y'=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \longrightarrow y'(\frac{\pi}{6})=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

۲۱- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}$، آهنگ متوسط تغییر تابع از نقطه $x=4$ تا $x=6/25$ از آهنگ لحظه‌ای آن در نقطه $x=4$ چقدر کمتر است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{1}{36}$ ✓ ۲) $\frac{1}{18}$ ۳) $\frac{5}{72}$ ۴) $\frac{1}{12}$

$x_1=4$ تا $x_2=6/25$: آهنگ متوسط تغییر تابع از $=\frac{f(6/25)-f(4)}{6/25-4}=\frac{\sqrt{\frac{625}{100}}-\sqrt{4}}{\frac{225}{100}}=\frac{\frac{25}{10}-2}{\frac{225}{100}}=\frac{\frac{5}{10}}{\frac{225}{10 \cdot 10}}=\frac{2}{9}$

آهنگ لحظه‌ای تابع در نقطه $x=4$: $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}$

آهنگ لحظه‌ای - آهنگ متوسط $=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{9-8}{36}=\frac{1}{36}$

۲۲- مشتق $\sin^3\sqrt{2x}$، به ازای $x=\frac{\pi^2}{18}$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) $\frac{9}{8\pi}$ ۲) $\frac{9}{4\pi}$ ۳) $\frac{27}{8\pi}$ ۴) $\frac{27}{4\pi}$ ✓

$$y=\sin^3\sqrt{2x}=(\underbrace{\sin\sqrt{2x}}_{u})^3 \longrightarrow y'=3u^2.u'=3(\sin\sqrt{2x})^2.(\frac{2}{2\sqrt{2x}}\cos\sqrt{2x}) \longrightarrow$$

$$y'(\frac{\pi^2}{18})=3(\sin\frac{\pi}{3})^2(\frac{1}{\frac{\pi}{3}}\cos\frac{\pi}{3})=\frac{9}{\pi}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2(\frac{1}{2})=\frac{9}{\pi}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{27}{8\pi}$$

۲۳- خط مماس بر منحنی $y=xe^{x^2-4}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محورها را با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۶ ۳) ۱۸ ۴) ۲۰ (تجربی خارج ۹۳)

$$y=xe^{x^2-4} \longrightarrow y'=1\times e^{x^2-4}+2xe^{x^2-4}\times x=e^{x^2-4}(1+2x^2)$$

x نقطه تماس $=2 \longrightarrow y$ نقطه تماس $=2 \xrightarrow{\text{نقطه تماس}} A\begin{vmatrix}2\\2\end{vmatrix}$

m قائم $= -\dfrac{1}{y'(2)} = -\dfrac{1}{9}$

$\xrightarrow{\text{معادله خط قائم}} y-2 = -\dfrac{1}{9}(x-2)$

حال با معلوم بودن معادله خط قائم محل برخورد این خط با محور xها را بدست می‌آوریم. داریم:

$$\xrightarrow{y=0} 0-2 = -\frac{1}{9}(x-2) \longrightarrow -2 = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9} \longrightarrow \frac{1}{9}x = \frac{20}{9} \longrightarrow x = 20$$

۲۴- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} - 5 & ; x \geq 1 \\ x^2+ax+b & ; x<1 \end{cases}$ در نقطه $x=1$ مشتق‌پذیر است. b کدام است؟ (تجربی خارج ۹۳)

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{x^2} & x>1 \\ 2x+a & x<1 \end{cases}$$

برای آنکه تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ مشتق‌پذیر باشد باید:

$\begin{cases} x=1 \text{ حد راست و مقدار تابع در } = -2 \\ x=1 \text{ حد چپ تابع در } = 1+a+b \end{cases} \xrightarrow{\text{حد راست = حد چپ = مقدار}} 1+a+b=-2 \longrightarrow a+b=-3 \quad (1)$

$\begin{cases} \text{مشتق راست} = f'_+(1) = -3 \\ \text{مشتق چپ} = f'_-(1) = 2+a \end{cases} \xrightarrow{\text{مشتق راست = مشتق چپ}} 2+a=-3 \longrightarrow a=-5 \xrightarrow[\text{معادله (1)}]{\text{جایگذاری در}} b=2$

۲۵- در تابع با ضابطه $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x در نقطه $x=1$ با نمو $0/44$ چه قدر از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه کمتر است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{24}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{6}$ ✓

آهنگ متوسط تغییر تابع $\longrightarrow \dfrac{f(1/44)-f(1)}{0/44} = \dfrac{5}{6}$

آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x=1$ برابر است با مشتق تابع در $x=1$. پس داریم:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \longrightarrow f'(1) = 1$$

اختلاف این دو برابر است با: $1 - \dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{6}$

۲۶ـ اگر $f(x)=x^3-[2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})$ کدام است؟ (تجربی خارج ۹۴)

۱) -2 ۲) -1 ✓ ۳) 1 ۴) 2

فرض کنیم x از سمت راست به $\sqrt{2}$ نزدیک شود در این صورت x^2 نیز از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شود و لذا در این همسایگی $[2x^2]=4$. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به صورت $f(x)=x^3-4x$ است که نتیجه می‌شود:

$$f'(x)=3x^2-4 \longrightarrow f'_+(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2-4=2$$

به همین ترتیب فرض کنیم x از سمت چپ به $\sqrt{2}$ نزدیک شود در این صورت x^2 نیز از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شود و لذا در این همسایگی $[2x^2]=3$. بنابراین ضابطهٔ تابع در این همسایگی به صورت $f(x)=x^3-3x$ است که نتیجه می‌شود:

$$f'(x)=3x^2-3 \longrightarrow f'_-(\sqrt{2})=3(\sqrt{2})^2-3=3$$

بنابراین:

$$f'_+(\sqrt{2})-f'_-(\sqrt{2})=2-3=-1$$

۲۷ـ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادلهٔ $y=\ln\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است؟

(تجربی خارج ۹۴)

۱) $\frac{5}{9}$ ۲) $\frac{8}{9}$ ✓ ۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\frac{10}{3}$

مختصات نقطهٔ تماس به صورت $(2,0)$ است.

$$y=\ln\frac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3} \longrightarrow y'=\frac{\dfrac{\dfrac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x^2-2x+3)-(2x-2)\sqrt{4x+1}}{(x^2-2x+3)^2}}{\dfrac{\sqrt{4x+1}}{x^2-2x+3}}$$

بنابراین شیب خط مماس در نقطه به طول $x=2$ برابر $m=\frac{-4}{9}$ است و معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y-0=\frac{-4}{9}(x-2) \longrightarrow y=\frac{-4}{9}+\frac{8}{9}$$

عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی در نقطه به طول $x=2$، $\frac{8}{9}$ است.

۲۸ـ در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ ، حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{48}$ ۲) $\frac{5}{24}$ ۳) $\frac{7}{24}$ ۴) $\frac{7}{12}$

نکته: $\lim \frac{f(1+h)-f(h)}{h}=f'(1)$

مشتق تابع هموگرافیک :

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \to y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$f(x)=\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{\frac12} \longrightarrow f'(x)=\frac12\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)'\times\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{\frac12-1}$$

$$\frac12\times\frac{4(3)-5(1)}{(x+3)^2}\times\left(\frac{4x+5}{x+3}\right)^{-\frac12} \xrightarrow{x=1} f'(1)=\frac12\times\frac{7}{4^2}\times\left(\frac94\right)^{-\frac12}=\frac{7}{32}\times\left(\frac49\right)^{\frac12}$$

$$\frac{7}{32}\times\sqrt{\frac49}=\frac{7}{32}\times\frac23=\frac{7}{48}$$

۲۹- در تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{1+\cos x} & ; x>0\\ \sin 2x & ; x\leq 0\end{cases}$ مقدار $f'_-(0)-f'_+(0)$ کدام است؟ تجربی خارج ۹۵

۱) ۰/۷۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۲۵ ۴) ۱/۵ ✓

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{1+\cos x} & ; x>0\\ \sin 2x & ; x\leq 0\end{cases}=\begin{cases}\tan\frac{x}{2} & ; x>0\\ \sin 2x & ; x\leq 0\end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac12\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) & ; x>0\\ 2\cos 2x & ; x\leq 0\end{cases}\longrightarrow f'_-(0)-f'_+(0)=2\cos(0)-\frac12\left(1+\tan^2(0)\right)=$$

$$2-\frac12=1.5$$

۳۰- در نقاطی از منحنی به معادلهٔ $x^2-4xy+3y^2+1=0$ خط مماس بر منحنی موازی محور xها است. طول نقاط تماس کدام است؟ (تجربی خارج ۹۵)

۱) ۱ و -۲ ۲) ۲ و -۲ ✓ ۳) ۱ و -۱ ۴) ۲ و -۱

وقتی خط مماس بر منحنی موازی محور xها است، باید شیب آن برابر صفر باشد یعنی: $y'(0)=0$

در توابع ضمنی با ضابطهٔ $F(x,y)=0$ داریم: $y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}$

$$y'_x=-\frac{F'_x}{F'_y}=0\to F'_x=0\to 2x-4y=0\to x=2y$$

$$(2y)^2-4(2y)y+3y^2+1=0\to 4y^2-8y^2+3y^2+1=0\to y^2=1\to y=\pm1\to x=2y$$

«۱۰- مشتق»

۱- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق‌پذیر است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $[0,1]$ ۲) $(-1,0)$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-1)$ ✓

این تابع در بازه‌ای پیوسته است که خروجی براکت تنها یک مقدار داشته باشد. حال با توجه به ضابطه‌ی $y=\left[\frac{1}{x}\right]$ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم. گزینه (۱) چون $x=0$ در این بازه وجود دارد مخرج کسر عبارت داخل براکت است، پس تابع در این فاصله ناپیوسته است.

گزینه ۲ ← $\left[\frac{1}{x}\right]$ بی‌شمار خروجی دارد پس تابع در این فاصله ناپیوسته است. $-1<x<0 \to \frac{1}{x}<-1$

گزینه ۳ ← تابع در این فاصله ناپیوسته است. $x\geq 1 \to 0<\frac{1}{x}\leq 1 \to \left[\frac{1}{x}\right]=0$ یا 1

گزینه ۴ ← تابع در این فاصله پیوسته است. $x<-1 \to 0>\frac{1}{x}>-1 \to \left[\frac{1}{x}\right]=-1$

۲- اگر $g(x)=\frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ و $f(x)=\sin^2\pi x$ مشتق تابع fog به ازای $x=2$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $\frac{5}{8}$ ۳) $\frac{3}{4}\pi$ ۴) $\frac{5}{8}\pi$

با کمک فرمول مشتق تابع مرکب مشتق fog را در $x=2$ می‌نویسیم:

$$(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x)) \longrightarrow (fog)'(2)=g'(2)f'(g(2))$$

چون $g(2)=\frac{1}{4}\sqrt{5(2)-9}=\frac{1}{4}$ بنابراین:

$$(fog)'(2)=g'(2)f'\left(\tfrac{1}{4}\right) \quad ⊛$$

با مشتق‌گیری از توابع f و g خواهیم داشت:

$$f(x)=\sin^2\pi x \longrightarrow f'(x)=2\pi\sin\pi x\cos\pi x \longrightarrow f'\left(\tfrac{1}{4}\right)=2\pi\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}=\pi$$

$$g(x)=\frac{1}{4}\sqrt{5x-9} \longrightarrow g'(x)=\frac{1}{4}\times\frac{5}{2\sqrt{5x-9}} \longrightarrow g'(2)=\frac{5}{8}$$

بنابراین از ⊛ و مقادیر به دست آمده حاصل مشتق را می‌یابیم:

$$(fog)'(2)=\frac{5}{8}\times\pi=\frac{5\pi}{8}$$

۳- اگر $f(x)=(x^2-x-2)\sqrt[3]{x^2-7x}$ باشد. حاصل $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) -6 ✓ ۲) -3 ۳) $-\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{4}$

مشتق در نقطه $x=-1$ را می‌خواهد، در ریشه پرانتز تابع رادیکال است.

$$f'(x)=(2x-1)\sqrt[3]{x^2-7x} \xrightarrow{x=-1} f'(-1)=(-2-1)\sqrt[3]{8}=-6$$

۴- تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ax^3+bx & ; x<1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x\geq 1\end{cases}$ در کل مجموعه اعداد حقیقی مشتق‌پذیر است. b کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) 1 ✓ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) 2

$$\lim_{x\to 1^-} ax^3+bx=\lim_{x\to 1^+} 2\sqrt{4x-3}=f(1) \xrightarrow{\text{شرط پیوستگی}} a+b=2$$

مشتق راست = مشتق چپ $\longrightarrow 2\times\frac{4}{2\sqrt{4x-3}}=3ax^2+b \xrightarrow{x=1} 3a+b=4$

از حل دستگاه بدست آمده به $a=1$ و $b=1$ می‌رسیم.

۵- اگر $f(x)=\frac{x^3-2}{1+x^3}$ ، $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ حاصل $f'(g(x))\cdot g'(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۲)

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{3}{x^2}$ ✓ ۳) $\frac{1}{3x}$ ۴) $\frac{x-3}{x^2}$

$$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x) \longrightarrow (f(g(x)))'=\left(\frac{x-1-2}{1+x-1}\right)'=\frac{3}{x^2}$$

۶- مشتق تابع $y=\cos^2(\tan^{-1}x)$ به ازای $x=1$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{1}{2}$ ✓ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) 1

$$y=\cos^2 u \longrightarrow y'=-2u'\cos u\sin u=-u'\sin 2u=-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\sin(2\tan^{-1}x)\Big|_{x=1}=$$

$$-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

۷- مشتق راست تابع با ضابطه‌ی $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه‌ی $x=-3$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{16}{3}$ ۲) -5 ✓ ۳) -4 ۴) $\frac{7}{3}$

$$x \to (-3)^+ \to f(x) = (-3-(-x))\sqrt[3]{9x} = (-3+x)\sqrt[3]{9x} \to f'_+(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(-3+x)$$

$$f'_+(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(-27)^2}} = -3 + \frac{9}{3(9)}(-6) = -3-2 = -5$$

۸- خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادله‌ی $2y + x = 7$ می‌باشد. اگر $g(x) = \frac{1}{x} f^{-1}(x)$ آن‌گاه $g'(2)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

۱) $-\frac{7}{4}$ ✓ ۲) $-\frac{5}{4}$ ۳) $-\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{4}$

شیب خط مماس $= -\frac{1}{2} = f'(3)$, $f(3) = \frac{7-3}{2} = 2 \to (3,2) \in f$, $(2,3) \in f^{-1}$

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} f^{-1}(x) + \frac{1}{x} {f^{-1}}'(x) \to g'(2) = -\frac{1}{4} f^{-1}(2) + \frac{1}{2} {f^{-1}}'(2) =$$

$$-\frac{1}{4}(3) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{f'(3)} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} - 1 = -\frac{7}{4}$$

۹- اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x + \frac{1}{2}]x + x^2$ در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ باشد. $\tan\theta$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ✓ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

می‌بینیم چپ و راست برای تابع در نقطه‌ی $x = \frac{1}{2}$ برابر نیست پس مشتق‌پذیر نیست. و اکنون با فرض فقط محاسبه خطوط نیم‌مماس داریم:

$$f_+(\tfrac{1}{2}) = x + x^2 \to f'_+(\tfrac{1}{2}) = 1 + 2x = 2 = m \; ; \; f_-(\tfrac{1}{2}) = x^2 \to f'_+(\tfrac{1}{2}) = 2x = 1 = m'$$

$$\tan\theta = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{2-1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

۱۰- از رابطهٔ $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطهٔ (۲و۱) کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱) $\frac{7}{6}$ ۲) $\frac{8}{6}$ ۳) $\frac{11}{6}$ ۴) $\frac{13}{6}$ ✓

$$x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2xy + x^2y' - 2yy' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \xrightarrow{(1,2)} 4 + y' - 4y' - 1 = 0$$

$y' = 1$

$$2xy + x^2y' - 2yy' - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \longrightarrow 2(y + y'x) + 2xy' + x^2y'' - 2(y'^2 + yy'') + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = 0$$

$$\xrightarrow[y'=1]{(1,2)} 2(2+1) + 2 + y'' - 2(1 + 2y'') - \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow y'' = \frac{13}{6}$$

۱۱- خط مماس بر نمودار $y^3 + 3xy^2 - 3x^3y = 1$ در نقطهٔ (۱و۱) از کدام نواحی صفحات مختصات می‌گذرد؟ (ریاضی خارج ۹۱)

۱) اول و سوم ۲) اول و چهارم ۳) اول و دوم و سوم ۴) اول و دوم و چهارم

باتوجه به ضابطهٔ منحنی به صورت ضمنی داده شده است برای محاسبه شیب خط مماس در نقطهٔ (۱و۱) از مشتق‌گیری ضمنی استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$\text{شیب خط مماس در } (1,1) = -\frac{3y^2 - 9x^2y}{3y^2 + 6xy - 3x^2}\Bigg|_{(x,y)=(1,1)} = -\frac{-6}{6} = 1$$

ودرنتیجه معادلهٔ خط مماس به صورت زیر است:

$$y - 1 = 1\times(x-1) \longrightarrow y = x$$

۱۲- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ حاصل $(g(f(x)))'$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) -1 ۲) 1 ۳) x ۴) $\frac{1}{2}x$

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = x \longrightarrow [g(f(x))]' = 1$$

۱۳- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & x\geq 1 \\ x^2+ax+b & x<1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است. $f(1-\sqrt{2})$ کدام می‌باشد؟ (ریاضی خارج ۹۲)

۱) $3-\sqrt{2}$ ۲) $2-\sqrt{2}$ ۳) $2-2\sqrt{2}$ ۴) $3-2\sqrt{2}$

چون $f'(1)$ موجود است. پس اولاً تابع f در $x=1$ پیوسته است. یعنی:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=1+a+b=1-1 \longrightarrow a+b=-1 \quad (1)$$

ثانیاً مشتق چپ و راست تابع f در $x=1$ باهم برابر است پس،

$$f'(x)=\begin{cases} 1+\frac{1}{x^2} & x>1 \\ 2x+a & x<1 \end{cases} \longrightarrow f'_-(1)=f'_+(1) \longrightarrow 2+a=1+1 \longrightarrow a=0 \quad (2)$$

$$(1),(2):\ b=-1$$

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{x} & x\geq 1 \\ x^2-1 & x<1 \end{cases} \xrightarrow{1-\sqrt{2}<1} f(1-\sqrt{2})=(1-\sqrt{2})^2-1=2-2\sqrt{2}$$

۱۴- مشتق تابع $y=\tan^2\left(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x\right)$ به ازای $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۹۳)

۱) $-16\sqrt{3}$ ۲) $-12\sqrt{3}$ ۳) $-8\sqrt{3}$ ۴) $-4\sqrt{3}$

$$y=\tan^2\left(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x\right) \longrightarrow y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\times\left(2\tan\left(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x\right)\right)\times\left(1+\tan^2\left(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}x\right)\right)$$

به ازای $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ داریم $\sin^{-1}x=\frac{\pi}{3}$، پس:

$$y'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4}}}\times\left(2\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\times\left(1+\tan^2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\times(2(-\sqrt{3}))(1+(-\sqrt{3})^2)=-16\sqrt{3}$$